Leçon 105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications

Développements :

Isométries du tétraèdre et du cube, Automorphismes de S_n.

Bibliographie :

Rombaldi, Ulmer, Calais, H2G2, Ortiz, Perrin, Peyré, Rauch, Gourdon.

Rapport du jury :

Parmi les attendus, il faut savoir relier la leçon avec les notions d'orbites et d'actions de groupes. Il faut aussi savoir décomposer une permutation en cycles à supports disjoints, tant sur le plan théorique (preuve du théorème de décomposition), que pratique (sur un exemple). Il est important de savoir déterminer les classes de conjugaisons du groupe symétrique par la décomposition en cycles, d'être capable de donner des systèmes de générateurs. L'existence du morphisme signature est un résultat non trivial mais ne peut pas constituer, à elle seule, l'objet d'un développement. Les applications sont nombreuses, il est très naturel de parler des déterminants, des polynômes symé- triques ou des fonctions symétriques des racines d'un polynôme. S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant aux automorphismes du groupe symétrique, à des problèmes de dénombrement ou aux représentations des groupes des permutations.

1 Groupes de permutations

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 (Romb p39)**.** *$S(E)$ muni de la composition.*

Théorème 2 (Romb p41)**.** *Si eE et F sont isomorphes alors $S(E)$ et $S(F)$ sont isomorphes.*

Définition 3 (Romb p39)**.** *S_n.*

Exemple 4. *Description de S_2,S_3.*

Corollaire 5 (Romb p42)**.** *Si $card(E) = n$ alors $S(E)$ est isomorphe à S_n.*

Théorème 6 (Romb p42)**.** *$card(S_n)$*

Notation 7 (Ulmer p41)**.** *Permutation sur 2 lignes*

Exemple 8 (Ulmer p41)**.** *S_3 non commutatif.*

Proposition 9 (Ulmer p42)**.** *L'intersection des stabilisateurs des éléments de l'ensemble $\{1, ., n\}$ sous l'action de S_n est un sous-groupe de S_n isomorphe à S_m. Donc morphisme injectif de S_m dans S_n.*

Application 10 (Ulmer p42)**.** *S_n non commutatif pour $n \geq 3$.*

Proposition 11 (Ulmer p41)**.** *Action naturelle à gauche de $S_(E)$ sur E.*

Proposition 12 (Ulmer p18)**.** *Morphisme structurel de l'action de G sur X.*

Définition 13. *Un sous-groupe G de S_n est transitif si son action naturelle sur $\{1, ..n\}$ est transitive.*

Théorème 14 (Ulmer p31)**.** *Tout groupe fini d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe de S_n.*

Remarque 15 (Ulmer)**.** *Ou plus intéressant $S_{[G:H]}$.*

1.2 Orbites, cycles

Définition 16 (Ulmer p42)**.** *[Romb p42] Point fixe, support d'une permutation.*

Proposition 17 (Ulmer p42)**.** *Deux permutations à supports disjoints commutent.*

Contre exemple 18 (Romb p43)**.** *$\sigma \neq id$ et $\sigma^{'} = \sigma^{-1}$.*

Définition 19 (Ulmer p43)**.** *[Romb p40] Cycle, transposition.*

Remarques 20 (Calais p117)**.**
1. *L'inverse d'un r-cycle est un r-cycle.*
2. *σ^p n'est pas forcément un r-cycle.[Romb p44]*

Définition 21 (Romb p43)**.** *Soit $\sigma \in S_n$. Les σ-orbites sont les orbites pour l'action naturelle de $\langle\sigma\rangle$ sur $\{1, ..n\}$ définie par $(\sigma^k, x) \mapsto \sigma^k(x)$.*

Proposition 22 (Romb p44)**.** *Une permutation σ est un $r-$cycle si et seulement si il n'y a qu'une seule σ-orbite non réduite à un point.*

Proposition 23 (Romb p40)**.** *Un r-cycle est d'ordre r.*

Proposition 24 (Romb p41)**.** *Centre de $S(E)$.*

Proposition 25 (Romb p46)**.** *$(a_1, ..., a_n) = (a_1, a_2)(a_2, a_3)..(a_{n-1}, a_n)$.*

Théorème 26 (Romb p45)**.** *[Ulmer p43] Décomposition en cycles à supports disjoints. Unicité à l'ordre près.*

Exemple 27 (Romb p46)**.**

Corollaire 28. *Toute permutation se décompose en produit de de transpositions.*

Définition 29 (Ulmer p45)**.** *Type d'une permutation : liste des cardinaux des σ-orbites rangées en ordre croissant.*

Proposition 30. *Les l_i correspondent à la longueur des cycles dans la décomposition.*

Remarque 31. *Correspond à une partition de n.*

La somme des l_i vaut n. Réciproquement, tout s-uplet de $N^{*,s}$ dont la somme des éléments vaut est le type d'une permutation de S_n.

Exemple 32. *Classes de conjufaison de S_3 et S_4.*

Proposition 33 (Ulmer p45)**.** *Ordre d'une permutation.*

Exemple 34 (Ulmer p45)**.** *[Romb ex 2.10]*

1.3 Groupe alterné

Définition 35 (Signature)**.** *[Romb p48] On note $\mu(\sigma)$ le nombre de σ-orbites distinctes ou r le nombre de cycles dans la décomposition. La signature de σ est défini par $\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-\mu(\sigma)} = (-1)^{n+r} \in \{-1, 1\}$.*

Proposition 36 (Romb p48)**.** *Si τ est une transposition, on a $\epsilon(\tau) = -1$.*

Théorème 37 (Romb p49)**.** *Si σ est produit de p-transpositions, on a $\epsilon(\sigma) = (-1)^p$. (La parité de p est donc uniquement déterminée par σ.)*

Théorème 38 (Romb p49)**.** *ϵ est l' unique morphisme de groupes surjectif de S_n dans $\mathbb{R}^*$.*

Proposition 39 (Romb)**.** *Autre définition de la signature.*

Définition 40 (Romb p51)**.** *Permutation paire, impaire.*

Définition 41 (Ulmer p50)**.** *Groupe alterné.*

Proposition 42 (Ulmer p50)**.** *A_n est n sous-groupe distingué d'indice 2, de card $n!/2$.*

Exemple 43 (Romb p51)**.** *A_2, A_3, A_4.*

Proposition 44 (H2G2)**.** *A_n est $(n-2)$-transitif.*

2 Structure des groupes symétriques et alternés

2.1 Classes de conjugaison (Action du groupe sur lui-même)

Proposition 45 (Romb p40)**.** *Le conjugué d'un r-cycle est un r-cycle : préciser. Deux cycles de même longueur sont conjugués dans S_n.*

Donc S_n agit par conjugaison de façon transitive sur l'ensemble des r-cycles.

Corollaire 46 (Ulmer p55 ex 5.7)**.** *Centre de S_n et A_n.*

Proposition 47 (Ulmer p47)**.** *[Peyré p201] On peut classifier les classes de conjugaison à l'aide du type. En particulier, il y a autant de classes de conjugaison que de partition de n. (Important en représentation, connaître le caractère irréductible de cette représentation.)*

Corollaire 48 (Romb p41)**.** *En faisant agir S_n par conjugaison sur l'ensemble des cycles, l'orbite d'un r-cycle pour cette action est l'ensemble de tous les r-cycles et son cardinal est $(r-1)!$(r parmi n).*

Exemple 49 (Ulmer p47)**.** *S_4.*

Proposition 50 (Romb p66 ex 2.24, 2.18)**.** *Les 3-cycles sont conjugués dans A_n. Les doubles-transpositions sont conjuguées dans A_n.*

Exemple 51 (Ortiz)**.** *Classes de conjugaison de S_3, S_4, A_4, S_5, A_5.*

2.2 Générateurs

Proposition 52 (Romb p46)**.** *S_n est engendré par les cycles, par les transpositions, par les $n-1$ transpositions $(1,k)$, $k \in \{2, ..n\}$, par les $(n-1)$ transpositions $(k, k+1)$, $k \in \{1, ..n-1\}$, par $(1,2), (1, 2.., n)$. (Il n'est pas possible d'enlever une de ces transpositions.)*

Exemple 53 (Romb p47)**.**

Proposition 54 (Romb p52, p66)**.** *A_n est engendré par les 3-cycles, par les $(1, 2, k)$, $k \in \{3, ..n\}$, $(k, k+1, k+2)$, $\{^{k \in \{1,..n-2\}}\}$.*

Proposition 55 (Romb p52)**.** *Pour $n = 3$ ou $n \geq 5$, A_n est simple.*

Proposition 56 (Romb p52)**.** *Pour $n \geq 5$, sous-groupes distingués de S_n.*

Contre exemple 57 (Perrin)**.** *A_4 n'est pas simple car le sous-groupe des doubles transpositions est distingué dans A_4.*

Théorème 58 (Perrin)**.** *Si $n \geq 6$, les automorphismes de S_n sont intérieurs.*

Corollaire 59 (Perrin p28)**.** *Groupe dérivé de A_n et de S_n.*

Corollaire 60 (Perrin p30)**.** *Si H est d'indice n dans S_n alors H est isomorphe à S_{n-1}*

2.3 Représentations des groupes de permutations : matrices de permutation et quelques représentations irréductibles

Définition 61 (Romb p56)**.** *Matrice de permutation*

Théorème 62 (Romb p56)**.** *L'application $P : \sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupes injectif de S_n dans $GL_n(K)$ et $det(P_\sigma) = \epsilon(\sigma)$.*

Corollaire 63 (Romb p56)**.** *Tout groupe fini d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe de $GL_n(F_p)$.*

Proposition 64. *Il existe autant de représentations irréductibles que de classes de conjugaison de n.*

Proposition 65 (Peyré p201)**.** *Représentation par permutation. Les actions sur des ensembles finis donnent des représentations par permutation.*

Théorème 66 (Peyré p202)**.** *Classes de similitude liées à la représentation par permutations. Théorème de Brauer.*

Proposition 67 (Peyré p203)**.** *Représentation de permutation non irréductible.* $(1, \vec{..},)$ *stable.*

Proposition 68 (Rauch p46)**.** *Table de S_3. S'injecte dans celle de S_4.*

Proposition 69 (Peyré)**.** *Table de S_4.*

Proposition 70 (Peyré)**.** *Sous-groupes distingués de G en fonction des noyaux.*

Proposition 71 (Peyré)**.** *Caractérisation de G simple.*

Exemple 72 (Peyré)**.** *Sous groupes distingués de S_4 ou A_4 ou D_6.*

Exemple 73. *Application à S_4, A_4 et A_5 (Rauch).*

3 Quelques applications en algèbre

3.1 Déterminant (action sur une base)

Proposition 74 (Gourdon ALG p135)**.** *L'ensemble des formes linéaires alternées. Il existe une unique forme prenant la valeur 1 sur une base B donnée, appelée déterminant dans la base B, noté det_B.*

Proposition 75 (Gourdon p135)**.** *Formule du déterminant.*

Définition 76 (Gourdon p136)**.** *Déterminant d'une matrice carrée.*

Exemple 77.

Proposition 78 (Gourdon p136)**.** *Si on effectue une permutation σ des colonnes de A, le déerminant est multiplié par $\epsilon(\sigma)$.*

Application 79 (Gourdon p136)**.** *Déterminant par blocs.*

Application 80 (Gourdon p137)**.** *Déterminant de Vandermonde.*

3.2 Polynômes symétriques (action sur les polynômes)

Définition 81 (Romb p57)**.** *Polynôme symétrique.*

Définition 82 (Romb p57)**.** *Polynômes symétriques élémentaires.*

Théorème 83 (Romb p57)**.** *Tout polynôme symétrique peut s'écrire comme un unique polynôme S évalué en les polynômes élémentaires.*

Application 84 (FGN AL1 p213)**.** *Théorème de Kroecker. Si P est un polynôme à coefficients entiers dont les racines complexes so,t toutes de module inférieur ou égal à 1 et que $P(0) \neq 0$ alors toutes les racines de P sont des racines de l'unité.*

3.3 Groupe des isométries d'un polyèdre régulier (action géométrique sur des petits groupes)

Proposition 85 (H2G2)**.** *Isométries du triangle, du cube et du tétraèdre.*